ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Γ΄ τάξης Ημερησίου Λυκείου για το σχ. έτος 2017- 2018

Αγαπητέ Μαθητή, Αγαπητή Μαθήτρια.

Στις φετινές οδηγίες διδασκαλίας και διαχείρισης της εξεταστέας ύλη των Μαθηματικών που εκδόθηκαν από το ΥΠ.Π.Ε.Θ. κρίθηκε σκόπιμο να συμπεριληφθούν χρήσιμες προτάσεις που, <u>χωρίς να ανήκουν στην εξεταστέα ύλη</u>, διευκολύνουν τη διδακτική διαδικασία, διευρύνοντας το μεθοδολογικό «οπλοστάσιο» σου και μπορούν να αποτελούν εργαλεία για τη λύση των ασκήσεων. Συγκεκριμένα:

Α] Από §1.2 του Σχολικού Βιβλίου. Επισημαίνουμε ότι:

Μπορεί το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν, χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με την συνάρτηση μηδέν.

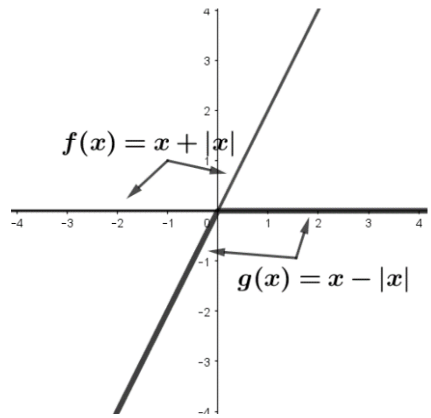
Παράδειγμα: Οι συναρτήσεις f, g με Π.Ο. το $\mathbb{R}$ και $f(x)=x+|x|$, $g(x)=x-|x|$. Όπου:

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+|x|)(x-|x|)=x^2-|x|^2=x^2-x^2=0$

Όμως, υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε: $f(x)\neq 0$, π.χ. $f(2)=4$ και

υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε: $g(x)\neq 0$, π.χ. $g(-2)=-4$

Οι γραφικές παραστάσεις των f, g



Β] Από §1.3 του Σχολικού Βιβλίου

Τονίζεται ότι μπορείς να χρησιμοποιείς για την επίλυση ασκήσεων, <u>χωρίς απόδειξη</u>, τις προτάσεις:

1) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1<x_2$.

2) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1>x_2$.

Για λόγους διδακτικούς παρουσιάζουμε την απόδειξη της πρότασης 1 (Αντίστοιχη είναι και της 2)

Απόδειξη: <u>(*Δεν αποτελεί εξεταστέα ύλη*)</u>

Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2\in\Delta$, για τα οποία ισχύει η υπόθεση και δεν ισχύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Τότε θα ισχύει: $f(x_1)<f(x_2)$ και $x_1\geq x_2$

- Αν ήταν $x_1>x_2$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ίσχυε $f(x_1)>f(x_2)$, που αντίκειται στην υπόθεση.
- Αν ήταν $x_1=x_2$, από τον ορισμό της συνάρτησης, θα ίσχυε $f(x_1)=f(x_2)$, που αντίκειται και αυτό στην υπόθεση.

Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.

Τελικά από τις παραπάνω προτάσεις και τον ορισμό της γνησίως αύξουσας και γνησίως φθίνουσας σε διάστημα Δ συνάρτησης προκύπτουν οι πολύ χρήσιμες για την επίλυση ανισώσεων (και όχι μόνο) ισοδυναμίες:

3) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \quad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta$$

4) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2 \quad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta$$

Γ] Από §1.7 του Σχολικού Βιβλίου

Έχεις την δυνατότητα να χρησιμοποιείς, <u>χωρίς απόδειξη</u>, τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο και αναφέρονται σε: Μη πεπερασμένο όριο & διάταξη για δυο συναρτήσεις

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1) Αν ισχύουν: α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

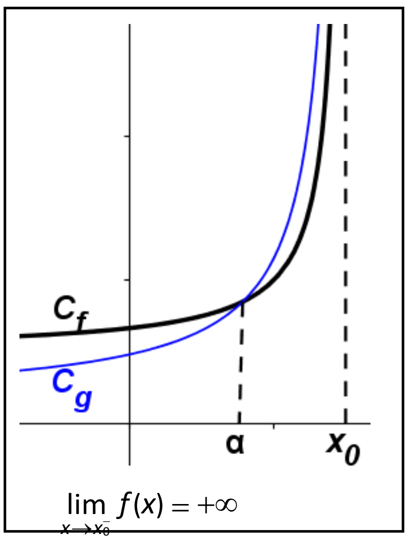
τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

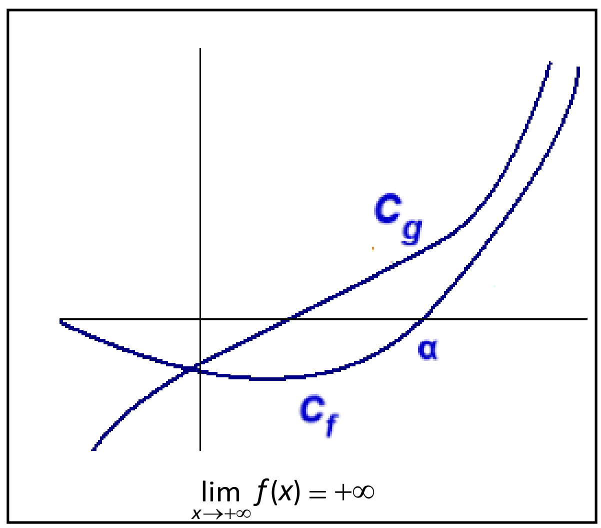
2) Αν ισχύουν: α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και β) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

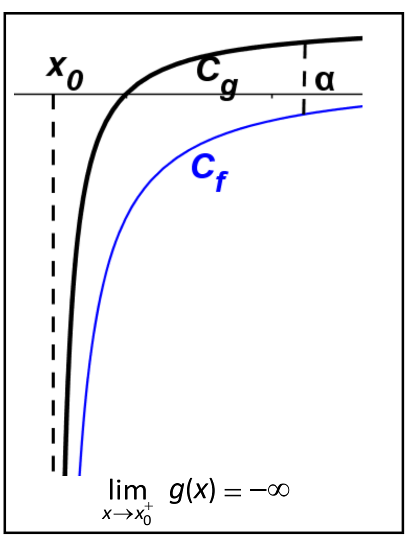
Διαισθητική παρουσίαση των παραπάνω προτάσεων, για κάποιες περιπτώσεις

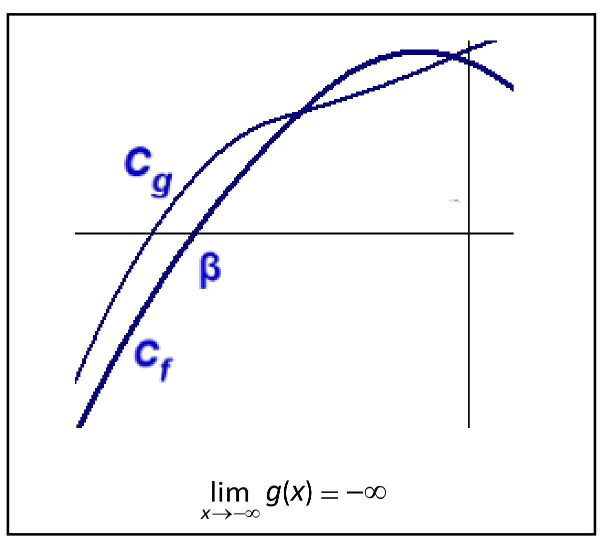
1)





2)





Εφαρμογή της 1

Αν για την συνάρτηση g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $(9 + 6x + x^2)g(x) \geq 4 + x$, να βρεθεί το $\lim_{x\to -3} g(x)$

Λύση

Από την σχέση $(9 + 6x + x^2)\, g(x) \geq 4 + x$, για $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, ισοδύναμα έχουμε $g(x) \geq \dfrac{4+x}{(x+3)^2}$

Βρίσκουμε το $\lim_{x\to -3} f(x)$ με $f(x) = \dfrac{4+x}{(x+3)^2}$

Επειδή $\lim_{x\to -3}(4 + x) = 1$ και $\lim_{x\to -3}(x+3)^2 = 0$ έχουμε μορφή $\dfrac{\alpha}{0}$.

Επομένως, για $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$: $f(x) = (x + 4)\cdot \dfrac{1}{(x+3)^2}$.

Υπολογίζουμε το όριο κάθε παράγοντα χωριστά:

- $\lim_{x\to -3}(4 + x) = 1 > 0$
- Υπολογίζουμε το όριο του $\dfrac{1}{(x+3)^2}$: $\left.\begin{array}{l}\text{Επειδή κοντά στο } x_0 = -3 \text{ είναι } (x + 3)^2 > 0 \\ \text{Και } \lim_{x\to -3}(x + 3)^2 = 0\end{array}\right\}$ είναι $\lim_{x\to -3}\dfrac{1}{(x+3)^2} = +\infty$

Άρα $\lim_{x\to -3} f(x) = +\infty$ οπότε λόγω της πρότασης 1, είναι: $\lim_{x\to -3} g(x) = +\infty$.

Γ] Διευκρίνιση στην §1.8 του Σχολικού Βιβλίου

Στο θεώρημα της σελίδας 78, που αφορά το σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης σε ανοικτό διάστημα (α, β), τα α, β μπορεί να είναι και μη πεπερασμένα.

Δ] Από §3.4 του Σχολικού Βιβλίου

Έχεις την δυνατότητα να χρησιμοποιείς, χωρίς απόδειξη, τις παρακάτω προτάσεις των οποίων οι αποδείξεις είναι προφανείς: (Εννοείται ότι οι αποδείξεις δεν θα σου ζητηθούν.)

«Έστω f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα [α, β].

- Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$
- •• Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο [α, β], (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, με $f(\xi) \neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Ε] Για την §3.5 σελ. 215-216 του Σχολικού Βιβλίου

Ορισμός: Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και α ένα σταθερό σημείο του Δ, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση F με πεδίο ορισμού το Δ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$.

Σχόλιο 1. Οι συναρτήσεις F και f δεν έχουν ίδια μεταβλητή**,** έτσι για να αποφύγουμε τη σύγχυση, συμβολίσαμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της F με x και τη μεταβλητή της f με t.

Τονίζουμε όμως ότι οι δύο μεταβλητές t, x παίρνουν τιμές από το ίδιο διάστημα Δ.

Για Παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού το $\Delta = [3, 6]$ και $\alpha = 4 \in \Delta$.

Η f είναι συνεχής στο Δ, επομένως για κάθε $x \in \Delta$ ορίζεται η συνάρτηση:

$F(x) = \int_4^x \frac{1}{t}dt$. Έτσι $F(5) = \int_4^5 \frac{1}{t}dt = \ldots$ $\quad F(3) = \int_4^3 \frac{1}{t}dt = \ldots$

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha\in\Delta$, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ με $x\in\Delta$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

Τονίζεται ότι η εισαγωγή της συνάρτησης $\int_\alpha^x f(t)dt$ γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό.

Για το λόγο αυτό <u>δεν θα διδαχθούν εφαρμογές και ασκήσεις</u> που αναφέρονται στη συνάρτηση $\int_\alpha^x f(t)dt$ και γενικότερα στη συνάρτηση $\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt$.

ΣΤ] Γενική Επισήμανση:

Από τη διδακτέα-εξεταστέα ύλη εξαιρούνται οι Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

Τυπογραφικά λάθη- διορθώσεις του Σχολικού Βιβλίου:

1] Στη βασική τριγωνομετρική ανισότητα της σελ.52 να συμπληρωθεί το "ίσο" και να γίνει $|\eta\mu x|\le|x|$.

2] Στη διατύπωση του Θεωρήματος της σελ. 186 (δεύτερη •) "κάθε άλλη παράγουσα $c\in\mathbb{R}$" *να γραφεί* "κάθε άλλη παράγουσα G".

3] Στην ισότητα του πρώτου πλαισίου σελ. 212 τα άκρα ολοκλήρωσης να αντιστραφούν.

Ο Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Α.Μ.Θ.
Ευστράτιος Καρασταμάτης

ΣΤΗ ΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΓΙΝΟΥΝ ΩΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΙ

(Για λόγους διδακτικούς παρουσιάζουμε τις αποδείξεις των προηγούμενων προτάσεων τις οποίες θεωρείστε ως ασκήσεις).

Αποδείξεις προτάσεων του Γ:

1) Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, προκύπτει ότι $f(x)>0$, κοντά στο x_0.

Όμως, $f(x)\le g(x)$ άρα είναι και $g(x)>0$, κοντά στο x_0.

Συνεπώς, κοντά στο x_0, είναι: $g(x)\ge f(x)\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{g(x)}\le\dfrac{1}{f(x)}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=0\\[2ex] \dfrac{1}{g(x)}>0\\[2ex] \text{κοντά στο } x_0\end{array}\right\}\ \text{άρα}\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=+\infty$$

2) Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, προκύπτει ότι $g(x)<0$, κοντά στο x_0.

Όμως, $f(x)\le g(x)$ άρα είναι και $f(x)<0$, κοντά στο x_0.

Συνεπώς, κοντά στο x_0, είναι: $f(x)\le g(x)\Leftrightarrow 0>\dfrac{1}{f(x)}\ge\dfrac{1}{g(x)}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0\\[2ex] \dfrac{1}{f(x)}<0\\[2ex] \text{κοντά στο } x_0\end{array}\right\}\ \text{άρα}\ \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=-\infty$$

Αποδείξεις προτάσεων του Δ:

1) για κάθε $x\in[α, β]$, είναι $f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\ge 0$. Επομένως έχουμε:

$$\int_α^β\big(f(x)-g(x)\big)dx\ge 0 \Leftrightarrow \int_α^β f(x)dx-\int_α^β g(x)dx\ge 0 \Leftrightarrow \int_α^β f(x)dx\ge\int_α^β g(x)dx$$

2) Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[α, β]$, τότε η συνάρτηση $f(x)-g(x)$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[α, β]$, και έχουμε:

$$\int_α^β\big(f(x)-g(x)\big)dx>0 \Leftrightarrow \int_α^β f(x)dx-\int_α^β g(x)dx>0 \Leftrightarrow \int_α^β f(x)dx>\int_α^β g(x)dx$$